Colle du 12/02 - Sujet 1
Matrices et dérivation

Question de cours

1. Enoncer le théorème des accroissements finis.
2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(x)-x}{x}$. Déterminer le domaine de définition de f. Est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. On pose

$$A = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1 \leqslant k,l \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

Calculer $A\overline{A}$. La matrice A est-elle inversible ?

Colle du 12/02 - Sujet 2
Matrices et dérivation

Question de cours

1. Définir les trois opérations élémentaires.
2. Démontrer l'égalité des accroissements finis.

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. En déduire les puissances de A.

Exercice 2. La fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}$ est-elle prolongeable par continuité ?

Colle du 12/02 - Sujet 3
Matrices et dérivation

Question de cours

1. Enoncer le théorème de la dérivée de la réciproque.
2. Déterminer l'inverse de A^T.

Exercice 1. Déterminer si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et si c'est le cas, calculer P^{-1}.

Exercice 2. Soit $f : [a;b] \to [a;b]$ dérivable sur $[a;b]$ telle que

$$\exists k \in \left]0;1\right[, \ \forall x \in [a;b], \qquad |f'(x)| \leqslant k.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [a;b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution notée $\alpha \in [a;b]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k\,|u_n - \alpha|$.
3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{\arctan(u_n)}{2}$.