Colle du 10/02 - Sujet 1
Variables aléatoires

Question de cours

1. Définir l'indépendance de n variables aléatoires.
2. Donner des propriétés de la variance. Que dire de la variance d'une somme ?

Exercice 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Z = X(Y+1)$. Déterminer la probabilité que Z soit pair.

Exercice 2. Tic et Tac vont cueillir des noisettes sauvages. On note X le nombre de noisettes obtenues et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. A la fin de la journée, s'ils ont trouvé un nombre pair non nul de noisettes, ils se les partagent équitablement la récolte en deux et les mangent. S'ils en ont trouvé un nombre impair, ils les stockent dans une cachette commune. La probabilité qu'ils ne trouvent aucune noisette est de $1/4$.

1. Déterminer λ.
2. Est-il plus probable qu'ils stockent les noisettes ou non ?
3. Calculer la probabilité que chacun ramène mange un nombre pair de noisettes.
4. Soit Y le nombre de noisettes mangées par Tic. Déterminer la série génératrice de Y puis son espérance et sa variance.

Colle du 10/02 - Sujet 2
Variables aléatoires

Question de cours

1. Définir la fonction génératrice.
2. Donner des propriétés de l'espérance. Cas d'un produit ?

Exercice 1. Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et de même loi $\mathscr{G}(p)$. On pose $m = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_1 > k)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(m > k)$.
3. En déduire la loi de m.

Exercice 2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire dont la série est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $G_X(t) = a(t+1)\,\mathrm{e}^t$.

1. Préciser a.
2. Quelle est la loi de X ?
3. Calculer son espérance et sa variance.

Colle du 10/02 - Sujet 3
Variables aléatoires

Question de cours

1. Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
2. Donner des propriétés de la fonction génératrice. Cas d'une somme ?

Exercice 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $T = X^2 + 1$.

1. Déterminer la loi de T.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $a = \sqrt{p+1}$. Calculer $\mathbb{P}(2aX < T)$.

Exercice 2. On lance n fois une pièce équilibrée et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note A_k l'évènement « obtenir pile au lancer k », B_k et B : « obtenir k piles lors des n lancers » et C « obtenir un nombre pair de piles lors des n lancers ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B_k)$ pour $k \in [\![1;n]\!]$ puis $\mathbb{P}(B)$.
2. Préciser $\mathbb{P}(B \mid A_1 \cap \cdots \cap A_n)$. Les évènements $A_1, \ldots, A_n, B$ sont-ils mutuellement indépendants ?
3. Les évènements $A_1, \ldots, A_{n-1}, B$ sont-ils mutuellement indépendants ?