Colle du 20/02 - Sujet 1
Dérivation

Question de cours

1. Enoncer la propriété reliant la convexité d'une fonction avec sa position à ses tangentes.
2. Démontrer le lien entre lischitziennité et continuité.

Exercice 1. Soit $a < b$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in [a; b]$, $f'(x) \leqslant M$ et $f(b) - f(a) = M(b-a)$. Montrer que f est affine.

Exercice 2. Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [0; 1]$, $-Mx \leqslant f'(x) - f'(x) \leqslant Mx$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$, $|f(x) - xf'(0)| \leqslant \frac{M}{2}x^2$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
4. Application : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Colle du 20/02 - Sujet 2
Dérivation

Question de cours

1. Donner la définition d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer le lien entre continuité et dérivabilité.

Exercice 1. A l'aide de la convexité, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $(E) : x^2y' + y = x^2 + x$ sur $\mathbb{R}$.

Colle du 20/02 - Sujet 3
Dérivation

Question de cours

1. Définir une fonction k-lipschitzienne.
2. Démontrer l'égalité des accroissements finis.

Exercice 1. Etudier la régularité de $f : x \mapsto \frac{2x\ln(x)}{x-1}$ (définition, prolongement par continuité, dérivabilité, $\mathscr{C}^1$, ...).

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$, telle que f' soit croissante et $f(0) = 0$. Montrer que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.