Colle du 17/03 - Sujet 1
Equations différentielles et isométries

Question de cours

1. Donner la définition d'une fonction vectorielle continue en t_0.
2. Donner une condition nécessaire et suffisant à l'aide des matrices de passage pour qu'une matrice soit orthogonale.

Exercice 1. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f : A \mapsto AM$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur M pour que f soit orthogonale.

Exercice 2. Soit $(E) : xy'' + (x-2)\,y' - 2y = 0$.

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Colle du 17/03 - Sujet 2
Equations différentielles et isométries

Question de cours

1. Définir une isométrie.
2. Que dire de la matrice d'une symétrie orthogonale ?

Exercice 1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xy'(x) - y(x) = x^2 \cos(x)$.

Exercice 2. Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $f\left(F^{\perp}\right) = f\,(F)^{\perp}$.

Colle du 17/03 - Sujet 3
Equations différentielles et isométries

Question de cours

1. Donner les solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
2. Démontrer trois conditions nécessaires et suffisantes pour que $u \in \mathcal{O}\,(E)$.

Exercice 1. Soient E un espace euclidien, u un vecteur unitaire de E et f l'application : $x \mapsto x - \lambda \langle x, u\rangle\, u$. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit orthogonale.

Exercice 2. Soit $(E) : xy'' + 2y' + xy = 0$.

1. Déterminer les solutions développables en série entières.
2. Résoudre (E) sur $]0;\pi[$.