Colle du 07/01 - Sujet 1
Séries entières

Question de cours

1. Enoncer la règle de d'Alembert.
2. Montrer que si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dots$.

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \arctan(n) x^n$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

Colle du 07/01 - Sujet 2
Séries entières

Question de cours

1. Définir une fonction développable en série entière.
2. Démontrer le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$.

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} x^n$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence et la somme totale de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{sh}(n)}{n} x^n$

Colle du 07/01 - Sujet 3
Séries entières

Question de cours

1. Définir le rayon de convergence d'une série.
2. Démontrer le développement en série entière de l'exponentielle.

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) x^n$

Exercice 2. On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}$.

1. Préciser a_1 et a_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant \frac{n!}{2^n}$.
3. Soit R le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n!}x^n$.
   (a) Justifier que $R \geqslant 2$ puis déterminer sur $]-R;R[$ une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f.
   (b) Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]-r;r[$, $f(x) > 0$.
   (c) En déduire a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.