Colle du 06/12 - Sujet 1
Matrices, analyse asymptotique

Question de cours.

1. $DL_4(0)$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
2. Démontrer le théorème de primitivation du développement limité.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de A puis en déduire si A est inversible ainsi que ses puissances. Autre méthode ?

Exercice 2. La fonction suivante f admet-elle une tangente en 0 ? Si oui donner localement la position de la courbe par rapport à sa tangente.

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\sin(x)} - 1}{x}.$$

Colle du 06/12 - Sujet 2
Matrices, analyse asymptotique

Question de cours.

1. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \ln(1-x)$.
2. Démontrer la formule de la trace du produit.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n + A^{-n}$.

Exercice 2. Déterminer le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto x\ln(2x+1) - x\ln(x)$.

Colle du 06/12 - Sujet 3
Matrices, analyse asymptotique

Question de cours.

1. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
2. Démontrer la formule de Taylor-Young.

Exercice 1. Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)}}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que
$$\mathrm{tr}\left(A^T A\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0_n.$$
2. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. Démontrer que
$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(BM) \quad \Rightarrow \quad A = B.$$