

Colle du 12/03 - Sujet 1
Dérivation et polynômes

Question de cours

1. Caractériser la multiplicité d'une racine à l'aide des dérivées.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P , alors \bar{z} aussi avec même ordre de multiplicité.

Exercice 1. Déterminer $E = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(1) = 1, P'(1) = 2, P''(1) = 3, P'''(1) = 4\}$.

Exercice 2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est prolongeable en une fonction \mathcal{C}^1 en 0.

On donne $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Colle du 12/03 - Sujet 2
Dérivation et polynômes

Question de cours

1. Donner le degré de la somme, du produit et de la composée.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que si P possède au moins $n + 1$ racines alors $P = 0$.

Exercice 1. Soit $P = X^4 - 14X^2 + 24X - 8$.

1. Déterminer toutes les racines multiples de P et préciser leur multiplicité.
2. Déterminer la factorisation en produit de facteurs irréductibles de P .

Exercice 2. Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe un $c \in]0; 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Colle du 12/03 - Sujet 3
Dérivation et polynômes

Question de cours

1. Énoncer le théorème limite de la dérivée.
2. Montrer que $\tilde{P}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow X - \alpha$ divise P .

Exercice 1. Calculer la dérivée n -ième de $f : x \mapsto x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P une solution de $(E) : (X + 1)P' = nP$.

1. Déterminer le degré de P .
2. *Méthode 1.*
 - (a) Montrer que P n'admet qu'une seule racine.
 - (b) Déterminer P .
3. *Méthode 2.*
 - (a) Déterminer une relation entre les coefficients de P .
 - (b) Déterminer à nouveau P .