

Colle du 13/01 - Sujet 1
Matrices, analyse asymptotique

Question de cours.

1. $DL_5(0)$ de la fonction $x \mapsto e^x$
2. Démontrer la formule de Taylor-Young.

Exercice 1. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)$.

Exercice 2. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$.

1. Soient M et N deux matrices nilpotentes de même ordre p . Montrer que $M + N$ est nilpotente.
2. Soient M et N deux matrices nilpotentes. Montrer que $M + N$ est encore nilpotente.

Colle du 13/01 - Sujet 2
Matrices, analyse asymptotique

Question de cours.

1. $DL_5(0)$ de la fonction $x \mapsto \cos(x)$
2. Démontrer le théorème de primitivation du développement limité.

Exercice 1. Déterminer que $f : x \mapsto e^{\frac{2}{x}} \sqrt{1+x^2} \arctan(x)$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 4A$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 4X - 2$. En déduire A^n .

Colle du 13/01 - Sujet 3
Matrices, analyse asymptotique

Question de cours.

1. $DL_5(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$
2. Démontrer la formule de la trace du produit.

Exercice 1. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer les puissances de J .
2. La matrice J est-elle inversible ?
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $JAJ = s(A)J$ où $s(A)$ est la somme de tous les coefficients de A .

Exercice 2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x \arctan(x) e^{\frac{1}{x}}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.