Colle du 28/01 - Sujet 1
Surfaces et intégrales à paramètre

Question de cours

1. Donner l'équation du plan tangent à une surface en un point régulier lorsque la surface est définie par un paramétrage.
2. Montrer que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une relation entre f' et f puis en déduire f.

Exercice 2. On considère la surface $S : \begin{cases} x(u,v) = u^2 + uv + v^2 \\ y(u,v) = u + v \\ z(u,v) = u^3 + v^3 \end{cases}$ et $S' : z = 3xy - 2y^3$.

1. Déterminer les points singuliers de S.
2. Déterminer l'équation du plan tangent à S en un point régulier.
3. Montrer que S est incluse dans S'. A-t-on $S = S'$?
4. Retrouver l'équation du plan tangent par une autre méthode.

Colle du 28/01 - Sujet 2
Surfaces et intégrales à paramètre

Question de cours

1. Enoncer le théorème de dérivation sous le signe intégral.
2. Si $x > 0$, montrer que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Exercice 1. Soit $\mathcal{S} : x^2 - xy - z = 0$ et $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 2y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer une équation du plan tangent à un point de $\mathcal{S}$.
2. Donner un paramétrage de $\mathcal{D}$.
3. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$ qui contiennent $\mathcal{D}$.

Exercice 2. On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F et montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur cet ensemble.
2. Montrer que F est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.
3. On admet que $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire F.

Colle du 28/01 - Sujet 3
Surfaces et intégrales à paramètre

Question de cours

1. Donner l'équation du plan tangent à une surface en un point régulier lorsque la surface est définie par une équation cartésienne.
2. Si $x > 0$, montrer que $t \mapsto \ln(t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Préciser $f'(0)$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{S} : \begin{cases} x(t,u) = \ln(t) + u/t \\ y(t,u) = t^2 + 1 + 2ut \\ z(t,u) = t + u \end{cases}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une surface réglée.
2. Montrer qu'en tout point régulier d'une génératrice, le plan tangent est invariant.