

Colle du 27/01 - Sujet 1
Ensembles et applications, continuité-dérivabilité

Question de cours.

1. Démontrer l'unicité de la limite.

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Etudier la régularité de f .

Exercice 2. Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

1. Donner un exemple où f est injective.
2. On pose

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Montrer que A n'admet pas d'antécédent. Que peut-on en déduire pour f ?

Colle du 27/01 - Sujet 2
Ensembles et applications, continuité-dérivabilité

Question de cours.

1. Démontrer les deux assertions suivantes :

(a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 1. Soit E un ensemble. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on pose $A \Delta B$ l'ensemble des éléments dans A ou dans B mais pas dans les deux à la fois. Montrer que $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

Exercice 2. (*Théorème de Darboux*) Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On veut montrer que f' vérifie la propriété du théorème des valeurs intermédiaires. On suppose $f'(a) < f'(b)$, on fixe λ tel que $f'(a) < \lambda < f'(b)$ et on définit $\varphi : x \mapsto f(x) - \lambda x$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\varphi(c) = \min_{t \in [a; b]} \varphi(t)$.
2. Conclure.

Colle du 27/01 - Sujet 3
Ensembles et applications, continuité-dérivabilité

Question de cours.

1. Démontrer que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exercice 1. Soient $I =]a; b[$ un intervalle de \mathbb{R} , $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit non nulle sur tout un voisinage de x_0 .

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.