Colle du 04/02 - Sujet 1
Intégrales à paramètre et espaces euclidiens

Question de cours

1. Enoncé l'inégalité de Cauchy-Schwarz
2. Montrer que $(A, B) \mapsto \operatorname{Tr}\left(A^T B\right)$

Exercice 1. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $F'(0)$.
3. Montrer que F est $\mathscr{C}^\infty$ et calculer $F^{(n)}(0)$. Quel est le rayon de convergence de sa série de Taylor ?

Colle du 04/02 - Sujet 2
Intégrales à paramètre et espaces euclidiens

Question de cours

1. Enoncé le théorème de dérivation sous le signe intégral
2. Toute famille orthogonale de... est...

Exercice 1. Soient $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + z - t = 0\right\}$. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 2. Sous réserve d'existence, pour $x \in \mathbb{R}$, on note $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x\,(1+\ln(t))}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer U l'ensemble de définition de F.
2. Montrer que pour tout $x \in U$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(1-x)}\,u}{1+u}\,\mathrm{d}u$.
3. Montrer que F est continue sur U.
4. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur U.
5. Montrer que pour tout $x \in]1; 1+\varepsilon[$, $F(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\varepsilon + t}\,\mathrm{d}t$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$.
6. Déterminer le tableau de variation de F sur U.

Colle du 04/02 - Sujet 3
Intégrales à paramètre et espaces euclidiens

Question de cours

1. Définition d'une fonction intégrable sur et lien avec la convergence.
2. Montrer que $(X, Y) \mapsto X^T Y$ est un produit scalaire.

Exercice 1. Soit $g : x \mapsto \int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos(t) + 1\right) \mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition de g puis montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;1[$.

Exercice 2. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
2. Déterminer $d = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.