Colle du 03/02 - Sujet 1
Ensembles et applications, continuité-dérivabilité

Question de cours. Démontrer l'unicité de la limite.

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.
2. Si f et g sont surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 2. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f admet un maximum global sur $\mathbb{R}$.

Colle du 03/02 - Sujet 2
Ensembles et applications, continuité-dérivabilité

Question de cours. Démontrer que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ telle que $f \circ f = f$.

1. Montrer que si f est bijective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que si f est surjective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.
3. Montrer que si f est injective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 2. Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(0) = a = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Montrer qu'il existe $c \in]0; +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Colle du 03/02 - Sujet 3
Ensembles et applications, continuité-dérivabilité

Question de cours. Démontrer les deux assertions suivantes :

1. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que f est surjective si et seulement si

$$\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E), \qquad f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B) \ \Rightarrow \ A \subseteq B.$$