

Colle du 02/04 - Sujet 1
Analyse asymptotique et espaces vectoriels

Question de cours

1. Soit $P : x \mapsto 1 + 3x - 5x^2 + 12x^4$. Déterminer un équivalent de P en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Montrer que $F = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_3 = 0\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 2.

1. Calculer le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$.
2. En déduire le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.
3. Retrouver le résultat précédent par un calcul direct.

Colle du 02/04 - Sujet 2
Analyse asymptotique et espaces vectoriels

Question de cours

1. Définir une famille libre.
2. Démontrer le $DL_n(0)$ de la fonction exponentielle.

Exercice 1. Soient $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \left\{f \in E \mid f(0) = \int_0^1 f(t) dt = 0\right\}$ et G l'ensemble des fonctions affines.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer une base de G .
3. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
4. (*Bonus*) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 2. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{1 + e^x}$

Colle du 02/04 - Sujet 3
Analyse asymptotique et espaces vectoriels

Question de cours

1. Énoncer le théorème d'encadrement des équivalents.
2. Démontrer l'équivalent en 0 de la fonction arctan.

Exercice 1. Déterminer le $DL_6(0)$ de $\tan'$ en déduire le $DL_7(0)$ de $\tan$.

Exercice 2. Soient $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f'' + f = 0_E\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Déterminer une base de G .
3. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
4. (*Bonus*) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .