Colle du 11/02 - Sujet 1
Espaces euclidiens et variables aléatoires

Question de cours

1. Donner la définition et la modélisation des lois de Bernoulli, binomiale et géométrique.
2. Démontrer l'expression de la variance d'une somme.

Exercice 1. Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, et pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P'(0)Q'(0) + P'(1)Q'(1).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de $F = \text{Vect}\left(X^2 - X, X^2 - 1\right)$.
3. En déduire la distance de $U = X^3 + X^2 + X + 1$ à F.

Exercice 2. On lance de façon indépendante une pièce ayant un probabilité $p \in \left]0; 1\right[$ de retourner pile. On note N l'apparition du premier pile. On lance alors N fois la pièce et on note X le nombre de piles obtenues.

1. Déterminer la loi de N puis celle de X.
2. Calculer la fonction génératrice de X.
3. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Colle du 11/02 - Sujet 2
Espaces euclidiens et variables aléatoires

Question de cours

1. Enoncer les inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev et la loi faible des grands nombres.
2. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire de loi de Poisson.

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{R}$, et (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X = j, Y = k) = a\frac{j + k}{3^{j+k}}.$$

1. Déterminer a.
2. Déterminer les lois marginales. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 2.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer $\min\left\{ \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Colle du 11/02 - Sujet 3
Espaces euclidiens et variables aléatoires

Question de cours

1. Définir un produit scalaire, la norme associée et l'inégalité de Cauchy-Schwarz
2. Montrer que $(X, Y) \mapsto X^T Y$ est un produit scalaire.

Exercice 1. Soient $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. Posons $Y = \frac{(-1)^X}{X(1-p)^X}$. Déterminer si Y est d'espérance finie ou non et en cas d'existence, la calculer.

Exercice 2. On pose $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) \, \mathrm{d}x$ est un produit scalaire.
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la parité de P_n.
3. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) P_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$.
5. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la norme euclidienne de P_n.