Colle du 10/02 - Sujet 1
Suites et polynômes

Question de cours. Montrer la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1. Déterminer les polynômes solutions de l'équation $P = (X-1)\,P'$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f \circ f(x) = 30x - f(x).$$

On pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = x$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Colle du 10/02 - Sujet 2
Suites et polynômes

Question de cours. Montrer que deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Exercice 1. Déterminer tous les polynômes P et Q tels que $P^2 = (X-1)\,Q^2$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^x + x - n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et déterminer sa limite.
3. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
4. En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{\ln^2(n)}{2n^2} + \dfrac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$.

Colle du 10/02 - Sujet 3
Suites et polynômes

Question de cours. Démontrer que si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de P alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)$ divise P. *On admettra l'initialisation.*

Exercice 1. Déterminer la multiplicité de 1 dans $P = X^5 - X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 2X$ puis factoriser P.

Exercice 2. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$.