Colle du 09/04 - Sujet 1
Espaces vectoriels et dénombrement

Question de cours

1. Donner le cardinal de l'ensemble des fonctions de E dans F.
2. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Exercice 1. Montrer que l'ensemble des suites réelles bornées est un espace vectoriel.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre d'involutions i.e. d'applications f de $E = [\![1; n]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer qu'une involution est bijective.
2. Déterminer le nombre de bijection de E dans E.
3. Calculer u_1, u_2, u_3.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)\, u_n$.

Colle du 09/04 - Sujet 2
Espaces vectoriels et dénombrement

Question de cours

1. Caractériser le fait que F soit un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $e_i \in F$, alors $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n) \subseteq F$.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des listes (avec ordre et répétition) d'entiers naturels non nuls entre 1 et n . On note B_n l'ensemble des éléments de A_n dont la somme vaut n et enfin $b_n = \mathrm{Card}\,(B_n)$.

1. Calculer $\mathrm{Card}\,(A_n)$.
2. Calculer $\mathrm{Card}\,(A_n)$ avec au moins deux 0.
3. Préciser b_1, b_2 et b_3.
4. Calculer le nombre d'éléments de B_n se terminant par 1.
5. En déduire une formule de récurrence pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et conclure.

Exercice 2. Soit $A = X^3 + 12X - 5$ et $F = \{\, P \in \mathbb{R}[X] \mid A \text{ divise } P \,\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et en déterminer un supplémentaire.

Colle du 09/04 - Sujet 3
Espaces vectoriels et dénombrement

Question de cours

1. Donner la formule donnant le cardinal de l'union.
2. Montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soient $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = (X-1)\,X\,(X+1)$, $P_3 = X^2\,(X+1)$ et $P_4 = (X-1)\,X\,(X+1)^2$. Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n.

1. Calculer de deux façons le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subseteq B$.
2. En déduire le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.