Colle du 18/02 - Sujet 1
Variables aléatoires et intégration terme à terme

Question de cours

1. Enoncer le théorème d'intégration terme à terme.
2. Démontrer la formule de la variance d'une somme.

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!}.$$

1. Déterminer a.
2. Préciser les lois marginales.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z.
5. Après avoir montré son existence, calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 2. On dispose de deux urnes $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$. Initialement, il y a deux boules vertes dans $\mathscr{U}_1$ et deux boules rouges dans $\mathscr{U}_2$. A chaque tirage on échange une boule de $\mathscr{U}_1$ avec une boule de $\mathscr{U}_2$. Soit X_n le nombre de boules vertes dans l'urne $\mathscr{U}_1$ à l'étape n. On note $U_n = (\mathbb{P}(X_n = 0), \mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2))$.

1. Déterminer A pour que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Montrer que $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et calculer cette constante.
3. Diagonaliser A.
4. En déduire la loi asymptotique de X_n.

Colle du 18/02 - Sujet 2
Variables aléatoires et intégration terme à terme

Question de cours

1. Définir et préciser la modélisation associée à une loi de Bernoulli, loi binomiale et loi géométrique.
2. Montrer que ln est intégrable sur $]0; 5]$.

Exercice 1. Soit X la variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ de loi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}$.

1. Déterminer a.
2. Est-ce que X admet une espérance ?

Exercice 2. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$.

1. Montrer que S est définie sur $]0; +\infty[$. On admet que S est continue sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer que S est intégrable sur $]0; 1]$ et que

$$\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\left(1+\sqrt{n+1}\right)}.$$

3. S est-elle intégrable sur $[1; +\infty[$?

Colle du 18/02 - Sujet 3
Variables aléatoires et intégration terme à terme

Question de cours

1. Enoncer les inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev et la loi faible des grands nombres.
2. Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire de loi de Poisson.

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2x\,\mathrm{e}^{-(2n+1)x}$ converge et calculer $S(x)$ sa somme totale.
2. En déduire que S est intégrable sur $]0;+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Une urne possède 1 boule verte et 3 boules rouges. On tire successivement et avec remise dans l'urne. On note X le rang d'apparition de la première boule de couleur identique à la boule précédente.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X=2)$, $\mathbb{P}(X=3)$ et $\mathbb{P}(X=4)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(X=2n)$ et $\mathbb{P}(X=2n+1)$.
3. Vérifier votre résultat en calculant $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)$.
4. Montrer que X admet une espérance et la calculer.