Colle du 17/02 - Sujet 1
Suites et polynômes

Question de cours. Montrer que deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Exercice 1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $P = X^5 + aX^2 + bX$. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles 1 est une racine multiple de P puis factoriser P.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n + 6x - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une unique valeur d'annulation sur $\mathbb{R}$ que l'on notera x_n.
2. Etudier la convergence et le limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

lycée Raoul Follereau Colle de mathématiques PTSI 2024-2025

Colle du 17/02 - Sujet 2
Suites et polynômes

Question de cours. Démontrer que si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de P alors $\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)$ divise P. *On admettra l'initialisation.*

Exercice 1. On considère l'équation $(E) : 3P = (X + 1) P' + P''$.

1. Déterminer le degré de P.
2. Déterminer des relations entre $P^{(k)}(-1)$.
3. A l'aide de la formule de Taylor, en déduire les solutions de (E).

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}}$.

1. Déterminer la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

---

lycée Raoul Follereau Colle de mathématiques PTSI 2024-2025

Colle du 17/02 - Sujet 3
Suites et polynômes

Question de cours. Montrer la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $(X + 3) P(X) = XP(X + 1)$.

1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X + 2)(X + 1) XQ$.
2. Montrer que Q est constant et conclure.