

**Colle du 25/03 - Sujet 1**  
**Etude métrique et extrema**

**Question de cours**

1. Définir l'abscisse curviligne d'une courbe et les formules de Frenet.
2. Préciser la méthode pour déterminer l'enveloppe d'une famille de droite  $D_t = M(t) + \text{Vect}(\overrightarrow{u(t)})$ .

**Exercice 1.** Déterminer les extrema locaux de  $f : (x, y) \mapsto x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$  sur  $\Omega = ]0; 1[$  puis sur  $F = [0; 1]^2$ .

**Exercice 2.** Déterminer une représentation paramétrique puis cartésienne de l'enveloppe de la famille de droites :

$$D_t : t^3x + 2ty + 2 = 0.$$

**Colle du 25/03 - Sujet 2**  
**Etude métrique et extrema**

**Question de cours**

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de deux variables réelles.
2. Donner la méthode pour déterminer les extrema d'une fonction...

**Exercice 1.** Déterminer l'enveloppe des normales à la courbe paramétrée pour tout  $t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  par  $f(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ . En déduire la développée de la courbe.

**Exercice 2.** Déterminer les extrema de la fonction  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \end{matrix}$ .

**Colle du 25/03 - Sujet 3**  
**Etude métrique et extrema**

**Question de cours**

1. Donner le repère de Frenet et définir la développée d'une courbe.
2. Montrer que si le plan tangent à la surface représentative de  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  est horizontal alors...

**Exercice 1.** Déterminer les extrema locaux sur  $\mathbb{R}^2$  de la fonction  $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$ .

**Exercice 2.** Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\Gamma$  la courbe d'équation  $y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$ .

1. (a) Montrer que  $\operatorname{sh}$  définit une bijection de  $\mathbb{R}_+$  dans un ensemble que l'on déterminera.  
(b) On pose  $h$  sa réciproque. Etudier  $h$ .
2. Tracer  $\Gamma$ .
3. Donner un paramétrage normal à cette courbe.