Colle du 01/04 - Sujet 1
Extrema et isométries

Question de cours

1. Donner la description des isométries de $\mathbb{R}^2$, leur représentation matricielle et les dessiner.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \dots$

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy + x^2y - xy^2$. Déterminer les extremums globaux et locaux de f.

Exercice 2. Soit $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.

Colle du 01/04 - Sujet 2
Extrema et isométries

Question de cours

1. Définir et caractériser les isométries.
2. Préciser la méthode pour déterminer les extremums d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$. Déterminer les extremums globaux et locaux de f.

Exercice 2. Déterminer la matrice de la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P} : 2x + y - 2z = 0$.

Colle du 01/04 - Sujet 3
Extrema et isométries

Question de cours

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de deux variables.
2. Montrer que la composée de deux isométries est une isométrie.

Exercice 1. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on pose $f : A \mapsto P^{-1}AP$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur P pour que f soit orthogonale.

Exercice 2. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto xy + z^2 \end{array}$. Justifier que f admet des extremums locaux sur l'ensemble suivant : $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9 \right\}$ et déterminer ces extremums.