Colle du 16/09 - Sujet 1
Séries et révisions d'algèbre

Question de cours

1. Définir l'image d'une application linéaire.
2. Enoncer le critère de domination pour une série complexe.

Exercice 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{array}$.

1. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
2. Démontrer que f est isomorphisme.

Exercice 2. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Colle du 16/09 - Sujet 2
Séries et révisions d'algèbre

Question de cours

1. Définir une série géométrique. Donner l'expression de sa somme partielle.
2. Donner une CNS pour qu'une famille soit une base.

Exercice 1. Démontrer la convergence et calculer la somme totale de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $(u - 2\mathrm{Id}_E) \circ (u - 3\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - 3\mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2$ tel que $u^n = a_n u + b_n \mathrm{Id}_E$.

Colle du 16/09 - Sujet 3
Séries et révisions d'algèbre

Question de cours

1. Définir la série exponentielle. Convergence ?
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ à l'aide d'une intégrale.

Exercice 1. Démontrer la convergence et calculer la somme totale de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{n!}$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les espaces :

$$F = \{\, P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0 \,\} \qquad \text{et} \qquad G = \operatorname{Vect}\left(X^2 + X\right).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit f la projection sur F parallèlement à G. Quelle est la matrice de f dans la base canonique ?
3. Soit g la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Quelle est la matrice de g dans la base canonique ?