Colle du 10/09 - Sujet 1
Révisions d'algèbre linéaire

Question de cours

1. Enoncer le théorème du rang et donner la caractérisation des isomorphismes.
2. Montrer que si f est un projecteur de E, alors...

Exercice 1. Déterminer le noyau et l'image de $f : a+bX+cX^2 \mapsto -2a+b+c+(a-2b+c)\,X+(-5a+4b+c)\,X^2$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Pour tout $(i,j,k,l) \in [\![1;n]\!]^2$ préciser $E_{ij}E_{kl}$.
2. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ telle que
$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda\,\mathrm{tr}$.

Colle du 10/09 - Sujet 2
Révisions d'algèbre linéaire

Question de cours

1. Caractériser les supplémentaires en dimension finie.
2. Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1. Déterminer la matrice de $f : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ dans la base canonique.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application φ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par
$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(X) = X + \mathrm{tr}(X)\,A.$$

1. Justifier que φ est un endomorphisme.
2. Montrer que si $\mathrm{tr}(A) \neq -1$ alors φ est bijectif.
3. On suppose que $\mathrm{tr}(A) = -1$.
   (a) Déterminer le noyau de φ.
   (b) Quel est le rang de φ ?

Colle du 10/09 - Sujet 3
Révisions d'algèbre linéaire

Question de cours

1. Définir une base et les coordonnées d'un vecteur dans une base.
2. Montrer que le noyau d'une application linéaire est un espace vectoriel.

Exercice 1. On pose $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (5, 7, 9)$.

1. Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}\,(u, v, w)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de F dans la base canonique.

Exercice 2. Soient $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et

$$F = \left\{ a\,(E_{11} - E_{22}) + b\,(E_{12} + E_{21}) \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$G = \left\{ a\,(E_{11} + E_{22}) + b\,(E_{12} - E_{21}) \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Soit p la projection sur F parallèlement sur G. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.