Colle du 23/09 - Sujet 1
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + (-1)^n$.

Exercice 1. Soient $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$. Démontrer qu'il existe une unique droite T qui est à la fois une tangente de f et à la fois une tangente de g.

Exercice 2. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y.$$

Colle du 23/09 - Sujet 2
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $t \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+t) \leqslant t$.
2. En déduire que pour tout $t \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+t) \geqslant \frac{t}{1+t}$.

Exercice 2. Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$. Montrer que $L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = (-1)^{n+1} 5$.

Colle du 23/09 - Sujet 3
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\exists! (g, h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, g paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2^{n+1}$. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de v_n en fonction de n et en déduire u_n.

Exercice 2. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.