Colle du 17/03 - Sujet 1
Espaces vectoriels et séries

Question de cours. Montrer que la somme de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ et pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1. Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Exercice 2. Soient $F = \left\{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; M^T + M \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base puis un supplémentaire de F dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Colle de mathématiques PTSI 2024-2025

Colle du 17/03 - Sujet 2
Espaces vectoriels et séries

Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation de deux espaces vectoriels en somme directe par l'intersection.

Exercice 1. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $F = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = 0_n \}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. On suppose désormais que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 2. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n(n+3))}{n(n+3)}$.

Colle de mathématiques PTSI 2024-2025

Colle du 17/03 - Sujet 3
Espaces vectoriels et séries

Question de cours. Démontrer le théorème d'encadrement série-intégrale.

Exercice 1. Déterminer la nature de la série de terme général $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Exercice 2. Montrer que $F = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u_3 = 0 \right\}$ est un espace vectoriel et déterminer un supplémentaire de F.