Colle du 15/04 - Sujet 1
Révisions

Exercice 1. Discuter suivant la valeur de $\beta \in \mathbb{R}$ la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. Soient $p \in]0;1[$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{G}(p)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right)$.
3. On pose $Q = \frac{X}{Y}$. Préciser $\mathbb{E}(Q)$.

Colle du 15/04 - Sujet 2
Révisions

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. *Indication : passer au logarithme.*

Exercice 2. Soit ℓ^2 l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ converge.

1. Montrer que ℓ^2 est un espace vectoriel.
2. Pour tout $(u,v) \in \ell^2$, on pose $\langle u, v\rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur ℓ^2.
3. Soit $u \in \ell^2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\,\mathrm{e}^{-n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^2 - 1}}\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2}$.

Colle du 15/04 - Sujet 3
Révisions

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \mathrm{d}t$. Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

1. Justifier que $R \geqslant 1$.
2. Soit $x > 1$, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^1 \left(\frac{(1+t)\,x}{2}\right)^n \mathrm{d}t \geqslant \int_{\sqrt{x}}^1 \left(\frac{(1+t)\,x}{2}\right)^n \mathrm{d}t$$
En déduire la valeur de R.

Exercice 2. Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $T(P) = \left(X^2 - 1\right) P'' - 2XP' + 2P$.

1. Déterminer A la matrice de T dans la base canonique.
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.