Colle du 31/03 - Sujet 1
Dimension et séries

Question de cours. Démontrer le théorème de comparaison.

Exercice 1. Déterminer la nature et calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{(n+1)!}$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $F = \{ P \in E \mid P(1) = P(2) = 0 \}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de F puis un supplémentaire de F dans E.

Colle de mathématiques PTSI 2024-2025

Colle du 31/03 - Sujet 2
Dimension et séries

Question de cours. Démontrer l'existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Exercice 1. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit H un hyperplan de E i.e. un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

1. Montrer qu'il existe $a \in E \setminus H$.
2. Montrer que $E = H \oplus \mathrm{Vect}\,(a)$.
3. Montrer qu'il existe une base de E qui ne contienne aucun vecteur ni de H ni de $a\mathbb{R}$.

Colle de mathématiques PTSI 2024-2025

Colle du 31/03 - Sujet 3
Dimension et séries

Question de cours. Démontrer la caractérisation de la somme directe par la base adaptée.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $G = \{ AX \mid X \in \mathbb{R}^3 \}$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel.
2. Déterminer sa dimension.
3. Déterminer un supplémentaire de G.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.