Colle du 07/04 - Sujet 1
Applications linéaires

Question de cours. Démontrer que l'image directe d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P - XP' \end{array}$. Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau.

Exercice 2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Montrer que si H est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ alors $g : \begin{array}{ccc} H & \to & \operatorname{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme.
2. Réciproquement si H est un sous-espace vectoriel de E et si $g : \begin{array}{ccc} H & \to & \operatorname{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme, montrer que $H \oplus \operatorname{Ker}(f) = E$.

Colle du 07/04 - Sujet 2
Applications linéaires

Question de cours. Montrer que l'image d'une base est libre si et seulement si l'application est injective.

Exercice 1. Soit $\varphi : \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ -5x+4y+z \end{bmatrix} \end{array}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le noyau de φ.
3. Calculer l'image de φ.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(u)$ tel que $u^3 + 2u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.
2. On pose $\tilde{u} = u_{|_{\operatorname{Im}(u)}}$. Que peut-on dire de $\tilde{u}$?

Colle du 07/04 - Sujet 3
Applications linéaires

Question de cours. Le théorème du rang sans les cas particuliers où $n = 0$ ou $p = 0$.

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{c} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AMA^T \end{array}$. Montrer que f est un endomorphisme et déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \\ n = 2\operatorname{rg}(f) \end{cases}$.