Colle du 14/04 - Sujet 1
Applications linéaires

Question de cours. Le théorème du rang sans les cas particuliers où $n = 0$ ou $p = 0$.

Exercice 1. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$ Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $F = \left\{ g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)} \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que F est isomorphe à $\mathscr{L}(E, \mathrm{Ker}(f))$.

Colle du 14/04 - Sujet 2
Applications linéaires

Question de cours. Démontrer que l'image directe d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & 2P + X^2P'' + P(0) \end{array}$. Montrer que φ est un endomorphisme. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = f$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.
2. Montrer que si E est de dimension finie alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathscr{B}$, la famille $\big(u, f^2(u)\big)$ est liée.

Colle du 14/04 - Sujet 3
Applications linéaires

Question de cours. Montrer que l'image d'une base est libre si et seulement si l'application est injective.

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$. Montrer que f est un endomorphisme et déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (1 - X)\,P'(2) + P(X) \end{array}$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer le noyau et l'image de φ. A-t-on $\mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_2[X]$.