Colle du 10/10 - Sujet 1
Algèbre linéaire et révisions d'analyse

Question de cours

1. Définir une somme de Riemann et donner le théorème associé.
2. Enoncer et démontrer des propriétés de la trace.

Exercice 1. Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & a & b & d \\ 1 & a & c & d \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix}$.

Exercice 2. Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$ et E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et T-périodique. Soit φ l'application définie sur E par $\forall f \in E$, $\varphi(f) = f'$.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de E.
2. φ est-il injectif ?
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \left\{ g \in E \;\middle|\; \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$. φ est-il surjectif ?
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans E.

Colle du 10/10 - Sujet 2
Algèbre linéaire et révisions d'analyse

Question de cours

1. Définir la somme de p espaces vectoriels. Que dire de la dimension ? Cas d'égalité ?
2. Calculer le déterminant de Vandermonde pour $n = 3$.

Exercice 1. Déterminer la régularité de $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension $2n$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{2n})$ une base de E et $\mathscr{B}' = (u_1, \dots, u_{2n})$ une famille de E définie par

$$\forall i \in [\![1; 2n]\!], \qquad u_i = ae_i + be_{2n+1-i}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\mathscr{B}'$ soit une base de E.

Colle du 10/10 - Sujet 3
Algèbre linéaire et révisions d'analyse

Question de cours

1. Enoncer le théorème des bornes atteintes.
2. Donner l'expression des polynômes de Lagrange.

Exercice 1. Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}\,(e_1, e_2)$. On note $\mathscr{L}_F\,(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E laissant F stable. Montrer que $\mathscr{L}_F\,(E)$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f\,(u_n)$.

1. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
3. Montrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et vérifie pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.
5. Déterminer la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.