Colle du 30/09 - Sujet 1
Algèbre et intégrales généralisées

Question de cours

1. Définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.
2. Donner 3 CNS pour que p sous-espaces vectoriels soient en somme directe dont une avec la dimension.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable par g.

Exercice 2.

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ converge.
2. Calculer I.

Colle de mathématiques PSI 2023-2024

Colle du 30/09 - Sujet 2
Algèbre et intégrales généralisées

Question de cours

1. Définir deux matrices semblables. Propriétés ?
2. Enoncer le critère de comparaison pour les fonctions positives.

Exercice 1. Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1 + x^5} \mathrm{d}x$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$, f l'endomorphisme canoniquement associé, $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3, e_2 + 2e_3)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans cette base.

Colle de mathématiques PSI 2023-2024

Colle du 30/09 - Sujet 3
Algèbre et intégrales généralisées

Question de cours

1. Définir un sous-espace stable par un endomorphisme ainsi qu'un endomorphisme induit.
2. Montrer que $\operatorname{Tr}(AB) = \dots$

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}\left(u^2\right) \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0_E\}$.

Exercice 2.

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^{-x} + 1)} \mathrm{d}t$ converge.
2. Calculer I.