Colle du 17/09 - Sujet 1
Révisions d'algèbre linéaire et d'analyse

Question de cours

1. Définir la trace d'une matrice et en donner les propriétés.
2. Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension n est un hyperplan si et seulement si...

Exercice 1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable en 0 en une fonction dérivable et déterminer alors sa dérivée en 0.

Exercice 2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geqslant 2$ et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} F_i = E \Rightarrow \left[F_p = E \text{ OU } \bigcup_{i=1}^{p-1} F_i = E\right]$.
2. En déduire que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} F_i = E \Rightarrow \exists i \in [\![1;p]\!], \qquad F_i = E$.

Colle du 17/09 - Sujet 2
Révisions d'algèbre linéaire et d'analyse

Question de cours

1. Définir la dérivée en un point. Définir la fonction dérivée.
2. Montrer que la trace est linéaire.

Exercice 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y-z, x+y+z, x-y-z) \end{array}$. Déterminer le noyau, l'image et la matrice de f.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})$ de $\operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id})$ et de $\operatorname{Ker}(u + 4\operatorname{Id})$.
2. Soient e_1, e_2 et e_3 trois vecteurs non nuls appartenant chacun à un noyau précédent différent. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

Colle du 17/09 - Sujet 3
Révisions d'algèbre linéaire et d'analyse

Question de cours

1. Enoncer la formule de Leibniz.
2. Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit $(f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathscr{L}(E)^4$ défini par

$$\begin{cases} f_1(e_1) = e_1 \\ f_1(e_2) = 0 \end{cases}, \begin{cases} f_2(e_1) = e_2 \\ f_2(e_2) = 0 \end{cases}, \begin{cases} f_3(e_1) = 0 \\ f_3(e_2) = e_1 \end{cases}, \begin{cases} f_4(e_1) = 0 \\ f_4(e_2) = e_2 \end{cases}.$$

Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 2. Etudier la régularité de $f : x \mapsto x + x^3 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ (définition, prolongement par continuité, dérivabilité, $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$, ...)