Colle du 14/11 - Sujet 1
Espaces préhilbertiens

Question de cours

1. Définir l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$.

Exercice 1. Soit $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y-z=0 \right\}$. Déterminer l'expression de la projection orthogonal sur F.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul de E tel que $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. En déduire que v la restriction de u de $\mathrm{Im}\,(u)$ à $\mathrm{Im}\,(u)$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}\,(u)$.

Colle du 14/11 - Sujet 2
Espaces préhilbertiens

Question de cours

1. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Donner la matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée.

Exercice 1. Soit E un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que si $F \subseteq G$, alors $G^\perp \subseteq F^\perp$.
2. Montrer que si E est euclidien, alors $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 2. Soient $E = \mathscr{C}([0;\pi],\mathbb{R})$ et pour tout $(f,g) \in E^2$, $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. On pose également,

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto \sin(x), \quad f_3 : x \mapsto \sin(2x)$$

et $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, f_3)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Déterminer le projeté orthogonal de $h : x \mapsto x$ sur F.