Colle du 30/09 - Sujet 1
Intégrales généralisées, espaces préhilbertiens

Question de cours

1. Définir l'intégrale convergente sur un intervalle ouvert.
2. Donner une CN de famille orthogonale de vecteurs non nulle et une CNS de base orthonormale.

Exercice 1. Soit E un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Exercice 2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x + 1}} \,\mathrm{d}x$.

Colle du 30/09 - Sujet 2
Intégrales généralisées, espaces préhilbertiens

Question de cours

1. Définir l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
2. Enoncer la positivité de l'intégrale généralisée.

Exercice 1. Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+t^2\right) \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Euclidien. On fixe (e_1, e_2) et (u_1, u_2) deux familles libres de E. Enfin on pose pour tout $x \in E$, $f(x) = \langle x, u_1 \rangle e_1 + \langle x, u_2 \rangle e_2$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Justifier que $\mathrm{rg}\,(f) \leqslant 2$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)^{\perp}$.
4. Déterminer le rang de f.
5. On suppose que $\langle u_1, e_1 \rangle = \langle u_2, e_2 \rangle = 0$ mais que $\langle u_1, e_2 \rangle \neq 0$ et $\langle u_2, e_1 \rangle \neq 0$. A quelle condition f est-elle diagonalisable ?

Colle du 30/09 - Sujet 3
Intégrales généralisées, espaces préhilbertiens

Question de cours

1. Définir une intégrale absolument convergente.
2. Propriété de l'orthogonal. CNS de $x \in F^{\perp}$ si F est de dimension finie.

Exercice 1. Nature de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que f est une homothétie : il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$.
   (a) Que dire de $\frac{1}{\lambda} f$? En déduire les valeurs propres de f et son déterminant.
   (b) Montrer que si $x \perp y$ alors $f(x) \perp f(y)$.
2. Réciproquement, soit f un endomorphisme non nul de E tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \perp y$ alors $f(x) \perp f(y)$. On fixe $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$ une base orthonormée de E.
   (a) Calculer $\langle e_1 + e_2, e_1 - e_2 \rangle$.
   (b) En déduire que $\|f(e_1)\| = \|f(e_2)\|$.
   (c) Conclure que f est une homothétie.