Colle du 07/10 - Sujet 1
Bijections et trigonométrie

Question de cours.

1. Linéariser $\sin(a)\sin(b)$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x^2-1\right)$ définit une bijection de $]1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction réciproque.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble que l'on précisera.
3. Déterminer une expression de f^{-1} analogue à celle de f.
4. Calculer de deux façons différentes la dérivée de f^{-1}.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{2}\sin(2x) \leqslant \sin(3x) + \sin(x)$.

Colle de mathématiques PTSI 2024-2025

Colle du 07/10 - Sujet 2
Bijections et trigonométrie

Question de cours.

1. Développer $\sin(a-b)$.
2. Démontrer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 1. Soit f $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$.

1. Etudier f.
2. Déterminer un voisinage de $+\infty$ le plus grand possible sur lequel f est bijective et déterminer alors f^{-1}.

Exercice 2. Soit $\alpha \in [0;\pi[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1. Déterminer $\tan(\alpha)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(x) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(x) \leqslant 2$ en fonction de α.
3. Calculer $\cos(2\alpha)$ et en déduire α.

Colle du 07/10 - Sujet 3
Bijections et trigonométrie

Question de cours.

1. Linéariser $\cos(a)\cos(b)$.
2. Montrer que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ à l'aide de limites usuelles.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $1+\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x) \leqslant 0$.

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto x + \ln(x) + 2$.

1. Montrer que f définit une bijection sur son ensemble de définition.
2. Tracer le graphe de f^{-1}.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} et donner une expression de $\left(f^{-1}\right)'(x)$ en fonction de $f^{-1}(x)$.