Colle du 28/11 - Sujet 1
Suite de fonctions

Question de cours

1. Définir un polynôme d'endomorphisme. Que dire du produit de deux polynômes d'endomorphisme ?
2. Déterminer l'expression de A^k si $A^2 - A - 2I_n = 0_n$.

Exercice 1. Etudier la convergence simple et uniforme de $f_n : x \mapsto \frac{x^n(1-x)}{n+1}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de I_n.
2. A l'aide d'un changement de variable, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Colle du 28/11 - Sujet 2
Suite de fonctions

Question de cours

1. Enoncer le théorème de convergence dominée.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}$.

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives convergeant uniformément vers une application f sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\left(\frac{f_n}{f_n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n existe.
3. Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Montrer que $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.