Colle du 04/11 - Sujet 1
Espaces préhilbertiens

Question de cours

1. Définir le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
2. Enoncer la caractérisation du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soit $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y-z+t=0 \\ x-y=0 \end{array} \right\}$.

1. Déterminer $F^\perp$
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ adaptée à F et $F^\perp$.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si $(x,y) \in E^2$, $\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$ alors $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont orthogonalement supplémentaires.
2. Même question si $x \in E$, $\langle x, f(x)\rangle = 0$.

Colle du 04/11 - Sujet 2
Espaces préhilbertiens

Question de cours

1. Définir un produit scalaire.
2. Enoncer les propriétés de l'orthogonal.

Exercice 1.

1. Montrer que $\langle \cdot,\cdot \rangle : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}\left(A^T B\right)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si $n=2$, déterminer une base orthonormée de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$.

Exercice 2. On pose pour tout $(P,Q) \in E^2 = (\mathbb{R}_2[X])^2$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E et déterminer une base orthonormée de E.

Colle du 04/11 - Sujet 3
Espaces préhilbertiens

Question de cours

1. Définir une famille orthonormale.
2. Montrer que l'orthogonal est supplémentaire lorsque E est...

Exercice 1. Soit E un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F \subseteq \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.
2. Montrer que si E est euclidien, alors $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Exercice 2. On pose $E = \mathscr{C}\left([-1;1], \mathbb{R}\right)$ et pour tout $(f,g) \in E^2$, $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)t^2 \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions paires est orthogonal à $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions impaires.