Colle du 08/10 - Sujet 1
Courbes paramétrées et équations différentielles

Question de cours

1. Définir et donner l'équation cartésienne d'une tangente à une courbe.
2. Démontrer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 homogène.

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = (t+1)\,\mathrm{e}^{2t}$.

Exercice 2. Soit Γ la courbe d'équation $x(t) = 2t + t^2$ et $y(t) = 2t - \frac{1}{t^2}$.

1. Représenter Γ.
2. Déterminer les éventuels points doubles.

Colle du 08/10 - Sujet 2
Courbes paramétrées et équations différentielles

Question de cours

1. Enoncer le théorème de Cauchy linéaire pour une équation différentielle d'ordre 2.
2. Présenter la méthode de variation de la constante pour rechercher une solution particulière à une EDL d'ordre 1.

Exercice 1. Etudier la courbe admettant pour paramétrage $\begin{cases} x(t) = t\ln(t) \\ y(t) = \frac{\ln(t)}{t} \end{cases}$.

Exercice 2. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y'' - \mathrm{e}^x\, y = 0. \tag{E}$$

1. A l'aide de la dérivée seconde de y^2, montrer que si y est une solution de (E) vérifiant $y(0) = y(1) = 0$ alors y est nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Soient y_1 et y_2 les solutions de (E) vérifiant $y_1(0) = y_2(1) = 0$ et $y_1'(0) = y_2'(1) = 1$. Après avoir justifier leur existence montrer que $(y_1,\ y_2)$ est un système fondamental de solutions.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'équation $y'' - \mathrm{e}^x\, y = f(x)$ admet une unique solution vérifiant $y(0) = y(1) = 0$.

Colle du 08/10 - Sujet 3
Courbes paramétrées et équations différentielles

Question de cours

1. Donner les solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 2.
2. Démontrer l'expression cartésienne d'une tangente à une courbe représentative d'une fonction f.

Exercice 1. Soit

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad t^2 y'' + t y' - y = t\ln(t). \tag{E}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de la forme $t \mapsto t^\alpha$ de l'équation homogène associée à (E).
2. Résoudre (E).

Exercice 2. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et Γ la courbe d'équation $y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$.

1. (a) Montrer que sh définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un ensemble que l'on déterminera.
   (b) On pose h sa réciproque. Etudier h.
2. Tracer Γ.
3. Donner un paramétrage normal à cette courbe i.e. un paramétrage s tel que $\forall s \in \mathbb{R}$, $\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}(s)\right\| = 1$.