Colle du 19/12 - Sujet 1
Séries de fonctions

Question de cours

1. Enoncer le théorème permettant de dériver une somme totale.
2. Montrer que pour tout $x \in]-1;1[$, $\ln(1-x) = \dots$.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\frac{(-1)^n}{n}}{n \sum_{k=0}^{n} x^k}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Montrer que S existe et déterminer la limite de S quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Colle du 19/12 - Sujet 2
Séries de fonctions

Question de cours

1. Enoncer le théorème d'intégration d'une somme sur un segment.
2. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;\pi[$.

Exercice 1. Déterminer le nombre de mots de cinq lettres comprenant trois consonnes, non toutes les trois consécutives, et deux voyelles sachant que l'alphabet compte six voyelles et vingt consonnes.

Exercice 2. Déterminer les convergences de la série de terme général $f_n : x \mapsto nx^2\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}$.

Colle du 19/12 - Sujet 3
Séries de fonctions

Question de cours

1. Enoncer le théorème de la double limite.
2. Montrer que la convergence normale implique la convergence uniforme.

Exercice 1. Déterminer les convergences de la série de terme général $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n(1+x)}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$.