Colle du 18/11 - Sujet 1
Espaces vectoriels normés et suites de fonctions

Question de cours

1. Définir la convergence simple et uniforme et donner le lien entre les deux.
2. Que dire des ouverts et des fermés de normes équivalentes ?

Exercice 1. Déterminer la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+x^2}$.

Exercice 2. Soit $E = \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $g \in E$ pour que l'application $N : f \mapsto \sup\limits_{t\in[0;1]} |f(t)g(t)|$ soit une norme sur E.

Colle du 18/11 - Sujet 2
Espaces vectoriels normés et suites de fonctions

Question de cours

1. Donner des exemples de normes sur $\mathbb{R}^p$.
2. Donner des propriétés des ouverts.

Exercice 1. Montrer que $N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \left| x_1 \,\mathrm{e}^{t^2} + x_2 \,\mathrm{e}^{2t^2} + x_3 \,\mathrm{e}^{3t^2} \right| \mathrm{d}t \end{array}$ est une norme sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Etudier les différents types de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{x^n-1}{x^n+1}$.

Colle du 18/11 - Sujet 3
Espaces vectoriels normés et suites de fonctions

Question de cours

1. Définir un fermé.
2. Enoncer une CNS de la nature d'une suite en dimension finie par les suites coordonnées.

Exercice 1. Déterminer la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^2 \,\mathrm{e}^{-nx}$.

Exercice 2. Soit $f \in E = \mathscr{C}([0;1], [0;1])$ telle que pour tout $(x, y) \in [0;1]^2$, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

1. Montrer que f est continue sur $[0;1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = c$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.