

Colle du 15/10 - Sujet 1
Equations différentielles et déterminant

Question de cours

1. Définir le déterminant d'une famille et d'un endomorphisme et en donner trois propriétés.
2. Présentation de la méthode de variation de la constante à l'ordre 1.

Exercice 1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' + 9y = t^2 + 1$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $D = \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$.

Colle du 15/10 - Sujet 2
Equations différentielles et déterminant

Question de cours

1. Définir l'application déterminant et en donner trois propriétés.
2. Démontrer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1.

Exercice 1. On considère dans \mathbb{R}^4 les espaces

$$P_1 : \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad P_2 : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y + 2z + 3t = 0. \end{cases}$$

A l'aide du déterminant, montrer que P_1 et P_2 sont supplémentaires.

Exercice 2. Résoudre $(E) : xy' + y = \arctan(x)$ sur \mathbb{R} .

Colle du 15/10 - Sujet 3
Equations différentielles et déterminant

Question de cours

1. Enoncer le théorème de Cauchy linéaire pour une équation différentielle d'ordre 2.
2. Montrer que deux matrices semblables ont le même déterminant.

Exercice 1. Soient a, b et c trois réels deux à deux distincts. On pose $P = a^2 + aX + X^2$, $Q = b^2 + bX + X^2$ et $R = c^2 + cX + X^2$. A l'aide du déterminant, montrer que la famille (P, Q, R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2. Résoudre $(E) : (1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$. On pourra poser $t = \arcsin(x)$.