

Colle du 04/11 - Sujet 1
Complexes et calcul algébrique

Question de cours. Démonstration de $\cos(p) + \cos(q) = \dots$ en passant par les complexes.

Exercice 1. Calculer $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^7$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$.

Colle du 04/11 - Sujet 2
Complexes et calcul algébrique

Question de cours. Démonstration de $|z + z'|^2 = \dots$ et de l'inégalité triangulaire supérieure.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{0 \leq i < j \leq n} 2^i$.

Exercice 2. On considère

$$f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

2. Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$. Pour tout $z \in P$, donner une expression simple de $|f(z)|$. En déduire $f(P)$.

Colle du 04/11 - Sujet 3
Complexes et calcul algébrique

Question de cours. Démontrer la somme des premiers carrés à l'aide de la somme des premiers entiers.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Calculer en fonction de H_n et n les sommes $\sum_{k=1}^n H_k$ et $\sum_{k=1}^n kH_k$.

Exercice 2. Résoudre dans \mathbb{R} , $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.