Colle du 09/12 - Sujet 1
Eléments propres et séries de fonctions

Question de cours

1. Définir la convergence simple d'une série de fonctions.
2. Préciser les coefficients connus du polynôme caractéristique, son degré et le lien avec les valeurs propres.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0_n$. Montrer que $\operatorname{tr}(A) \leqslant 3n$.

Exercice 2. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Colle du 09/12 - Sujet 2
Eléments propres et séries de fonctions

Question de cours

1. Définir le polynôme d'une matrice et d'un endomorphisme.
2. Donner le lien entre les éléments propres d'un endo et de la matrice associée.

Exercice 1. Etudier la convergence simple et normale de de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto \frac{x}{x^2+n^2}$.

Exercice 2. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = X(X-1)P(-1) + (X+1)(X-1)P(0) + (X+1)XP(1)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.
3. Soit P un vecteur propre de f. Montrer que $P \in \operatorname{Ker}(f) \cup \operatorname{Im}(f)$.
4. Déterminer les éléments propres de f.

Colle du 09/12 - Sujet 3
Eléments propres et séries de fonctions

Question de cours

1. Définir la convergence uniforme d'une série de fonctions.
2. Montrer le lien entre la convergence normale et uniforme.

Exercice 1. Etudier la convergence simple et normale de de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto n^3 \,\mathrm{e}^{-n^2 x}$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Im}(A)$.
2. Soit X un vecteur propre de A. Montrer que $X \in \operatorname{Ker}(A) \cup \operatorname{Im}(A)$.
3. Déterminer les éléments propres de A.