

Colle du 05/11 - Sujet 1
Déterminant, séries numériques

Question de cours

1. Définir le déterminant d'une famille et d'un endomorphisme et en donner trois propriétés.
2. Présentation de la méthode de variation de la constante à l'ordre 1.

Exercice 1. Calculer $D = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$.

Exercice 2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}}$.

Colle du 05/11 - Sujet 2
Déterminant, séries numériques

Question de cours

1. Définir l'application déterminant et en donner trois propriétés.
2. Démontrer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1.

Exercice 1. Calculer $D = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

Exercice 2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln \left(\frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2 + 2} \right)$.

Colle du 05/11 - Sujet 3
Déterminant, séries numériques

Question de cours

1. Énoncer le théorème de Cauchy linéaire pour une équation différentielle d'ordre 2.
2. Montrer que deux matrices semblables ont le même déterminant.

Exercice 1. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et déterminer sa somme totale.

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = 3$. On note \mathcal{C} la base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$ et

$$D = \det_{\mathcal{C}} (P, XP, P', XP', X^2 P').$$

1. Montrer que $D = 0$ si et seulement s'il existe $U \in \mathbb{C}_1[X] \setminus \{0\}$ et $V \in \mathbb{C}_2[X] \setminus \{0\}$ tels que $UP = VP'$.
2. Montrer que P admet une racine multiple si et seulement si $D = 0$.
3. Soit $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ et $P = X^3 + pX + q$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que P admette une racine multiple.