

Colle du 23/01 - Sujet 1
Réduction et équations différentielles**Question de cours**

1. Énoncer le théorème de Cauchy à l'ordre 1.
2. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = AM$.

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Diagonaliser f .

Exercice 2. Résoudre sur \mathbb{R} le système

$$(S) : \begin{cases} x' = -7x - 5y + e^t \\ y' = 10x + 8y \end{cases}$$

Colle du 23/01 - Sujet 2
Réduction et équations différentielles**Question de cours**

1. Donner une condition nécessaire et suffisante de trigonalisation.
2. Soit
 - (a) χ_u scindé et $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), m_\lambda = \dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda(u))$
 - (b) $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda(u)) = n = \dim(E)$
 - (c) $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$

Montrer que (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c).

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)y'(x) + y(x) = 2$.

Exercice 2. Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable?
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.