Colle du 16/12 - Sujet 1
Séries de fonctions et applications continues

Question de cours

1. Définir la continuité en un point.
2. Enoncer une CNS de convergence uniforme à l'aide de la suite de reste.

Exercice 1. Soit D une partie d'un espace vectoriel normé E. On suppose que D est dense dans E : $\overline{D} = E$. Soient f et g deux fonctions continues coïncidant sur D. Montrer que $f = g$ sur E.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0;+\infty[$, on pose $f_n(t) = 2\,\mathrm{e}^{-(2n+1)t}\sin(t)$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2+1}$.

Colle du 16/12 - Sujet 2
Séries de fonctions et applications continues

Question de cours

1. Définir la limite en un point adhérant.
2. Enoncer le théorème d'intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$. Justifier que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ existe sur $]0;+\infty[$ et préciser $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 2. Soient $E = \mathscr{C}([-1;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour tout $f \in E$ par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|$. On pose également pour tout $f \in E$, $\varphi(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{tf(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que φ est continue.

Colle du 16/12 - Sujet 3
Séries de fonctions et applications continues

Question de cours

1. Définir la convergence uniforme.
2. Montrer qu'une application linéaire sur un espace de dimension finie est continue.

Exercice 1. Etudier la convergence simple et normale de de la série $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x^2+\ln(n)}$.

Exercice 2. Soient $I =]-1; +\infty[$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

1. Montrer que S est définie sur I.
2. Montrer que S est continue sur I.
3. Préciser la monotonie de S.
4. Calculer $S(x+1) - S(x)$.
5. En déduire un équivalent de S en -1.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En déduire un équivalent de S en $+\infty$.