Colle du 12/11 - Sujet 1
Séries, fonctions de deux variables

Question de cours

1. Définition du produit de Cauchy. Convergence ?
2. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} - a_n$ converge si et seulement si...

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles secondes de $f : (x, y) \mapsto \sin\left(x^2y\right)$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n^3+6n^2-5n+2}{n!}$.

1. Etudier la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer les coordonnées de $P = X^3 + 6X^2 - 5X + 2$.
4. En déduire la somme totale de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Colle du 12/11 - Sujet 2
Séries, fonctions de deux variables

Question de cours

1. Définition d'un ouvert et d'un fermé.
2. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les dérivées partielles premières de $g : (u, v) \mapsto f\left(u + v, u^2v\right)$.

Exercice 1. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{5 - \sin(n) + \mathrm{e}^{-n}}{n^2 + 4n + 6}$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^1\left(\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$. *On pourra poser $u = x + 2y$ et $v = x - 2y$.*

Colle du 12/11 - Sujet 3
Séries, fonctions de deux variables

Question de cours

1. Définition de la dérivée partielle en un point.
2. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge absolument si et seulement si...

Exercice 1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y + \mathrm{e}^x \\ f(x,0) = x^2 \text{ et } f(0,y) = 3y. \end{cases}$$

Exercice 2.

1. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\, 3^n$ converge.
2. En faisant apparaître un produit de Cauchy, calculer sa somme totale.
3. Proposer une (deux ?) autre méthode pour calculer sa somme totale.