

Colle du 18/11 - Sujet 1
Fonctions usuelles et équations complexes

Question de cours. Démonstration de l'écriture polaire des racines n -ièmes de l'unité.

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 + 8z^2 + 160 = 0$.

Exercice 2. Simplifier la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$.

Colle du 18/11 - Sujet 2
Fonctions usuelles et équations complexes

Question de cours. Justifier la dérivabilité de la fonction arcsin et calculer sa dérivée.

Exercice 1.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, développer $\operatorname{sh}(2a)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 2. Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe.

1. Calculer ω l'affixe de Ω le centre de gravité du triangle ABC .
2. On suppose que le triangle ABC est équilatéral.
 - (a) Exprimer b en fonction de a et de ω puis c en fonction de a et de ω .
 - (b) En déduire que $a + bj + cj^2 = 0$.
3. On suppose maintenant que $a + bj + cj^2 = 0$.
 - (a) Soient a' , b' et c' respectivement les images de a , b et c par la translation de vecteur d'affixe $-\omega$. Montrer que $a' + b'j + c'j^2 = 0$.
 - (b) Préciser le centre de gravité de $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$.
 - (c) En déduire que $A'B'C'$ est équilatéral et conclure.

Colle du 18/11 - Sujet 3
Fonctions usuelles et équations complexes

Question de cours. Énoncer et démontrer la relation entre $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2 \cos(n\theta)$.

Exercice 2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2 \arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.