

Colle du 28/01 - Sujet 1
 Systèmes et continuité

Question de cours

1. Donner la définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ à l'aide de la définition.

Exercice 1. Résoudre, suivant la valeur de $m \in \mathbb{R}$, le système $(\mathcal{S}_m) : \begin{cases} mx + (m-1)y + z = 0 \\ mx + (m-1)y + (m-1)z = m \\ 2x + my + 3z = 3 \end{cases}$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$.

Colle du 28/01 - Sujet 2
 Systèmes et continuité

Question de cours

1. Donner la définition de $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.
2. Montrer que si f converge en $a \in \mathbb{R}$ alors f est bornée au voisinage de a .

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = a$.
2. La fonction f est-elle bornée ?

Exercice 2. Discuter suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, les solutions du système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y + (a-1)z = a \\ x + y + z = a + 1 \end{cases}$

Colle du 28/01 - Sujet 3
 Systèmes et continuité

Question de cours

1. Énoncer le théorème de la bijection.
2. Montrer qu'un système à n équations et n inconnues homogène est de Cramer si et seulement s'il admet pour unique solution le n -uplet $(0, \dots, 0)$.

Exercice 1. Résoudre, suivant la valeur de $m \in \mathbb{R}$, le système $(\mathcal{S}_m) : \begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$.

Exercice 2. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0; 1]$ telles que pour tout $x \in [0; 1], f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 1$ tel que pour tout $x \in [0; 1], f(x) > \alpha g(x)$.