Colle du 13/01 - Sujet 1
Probabilités et réduction

Question de cours

1. Définir une matrice diagonalisable.
2. Enoncer la formule des probabilités composées.

Exercice 1. On possède deux urnes. L'urne V contient une boule rouge et trois vertes, l'urne R deux rouges et deux vertes. On effectue des tirages avec remise de la façon suivante : si l'on tire une verte, la fois suivante on tire dans l'urne V et si l'on tire une rouge, la fois suivante on tire dans l'urne R. Pour le premier tirage on choisit une urne au hasard.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la première boule verte au troisième tirage ?
2. On a obtenu une boule verte au deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'avoir pioché dans l'urne R ?

Exercice 2.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
2. Calculer les puissances de A.

Colle du 13/01 - Sujet 2
Probabilités et réduction

Question de cours

1. Définir un ensemble dénombrable.
2. Donner une CNS de diagonalisabilité en terme de polynôme annulateur.

Exercice 1. Un tricheur possède 3 pièces équilibrées et une pièce truquée retournant pile avec probabilité p. On choisit une pièce au hasard.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?
2. Sachant que l'on a obtenu pile quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce truquée ?

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 6A + 8I_3$.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$. Montrer que λ est une racine de $X^2 - 6X + 8$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n par deux méthodes.

Colle du 13/01 - Sujet 3
Probabilités et réduction

Question de cours

1. Définir une probabilité
2. Montrer que A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ ... est un polynôme annulateur de A.

Exercice 1. Déterminer si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et si oui la diagonaliser.

Exercice 2. On lance n fois une pièce équilibrée et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note A_k l'évènement « obtenir pile au lancer k », B_k et B : « obtenir k piles lors des n lancers » et C « obtenir un nombre pair de piles lors des n lancers ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B_k)$ pour $k \in [\![1;n]\!]$ puis $\mathbb{P}(B)$.
2. Préciser $\mathbb{P}(B \mid A_1 \cap \cdots \cap A_n)$. Les évènements $A_1, \ldots, A_n, B$ sont-ils mutuellement indépendants ?
3. Les évènements $A_1, \ldots, A_{n-1}, B$ sont-ils mutuellement indépendants ?