Colle du 26/11 - Sujet 1
Réduction

Question de cours

1. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n soit diagonalisable.
2. Montrer que si x est un vecteur de propre d'un endomorphisme f, alors pour tout entier n, x est un vecteur propre de f^n.

Exercice 1. Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et f définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = \left(X^2 - X\right) P(1) + \left(X^2 + X\right) P(-1)$.

1. Démontrer que $P \in \operatorname{Ker}(f)$ si et seulement si $X^2 - 1$ divise P.
2. Calculer $f\left(X^2\right)$ et $f(X)$.
3. f est-il diagonalisable ?

Colle du 26/11 - Sujet 2
Réduction

Question de cours

1. Définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre, d'un sous-espace propre, de l'ordre de multiplicité et comparaison entre la dimension du sous-espace propre et l'ordre de multiplicité.
2. Montrer que si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, alors λ est une valeur propre de f si et seulement si $\det(\lambda \operatorname{Id}_E - f) = 0$.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice nilpotente d'ordre p : $A^p = 0_n$. Déterminer le spectre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A \neq O_n$ et $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto -M + \operatorname{tr}(M) A$.

1. Montrer que si $\operatorname{tr}(A) \neq 1$ alors φ est bijective.
2. Si $\operatorname{tr}(A) = 1$ déterminer l'image et le noyau de φ.
3. Déterminer les éléments propres de φ.

Colle du 26/11 - Sujet 3
Réduction

Question de cours

1. Définition d'un endomorphisme diagonalisable, d'une matrice diagonalisable.
2. Montrer que si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u est scindé simple sur $\mathbb{K}$, alors u est diagonalisable. Cependant la réciproque est fausse.

Exercice 1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui la diagonaliser.

Exercice 2. Soit $n \in 2\mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = a$ si $i+j$ est pair et $a_{i,j} = b$ sinon.

1. Déterminer le rang de A. On suppose désormais que le rang de A est maximal.
2. Déterminer les éléments propres de A.